

La inversión es una transformación geométrica que liga a dos figuras planas.

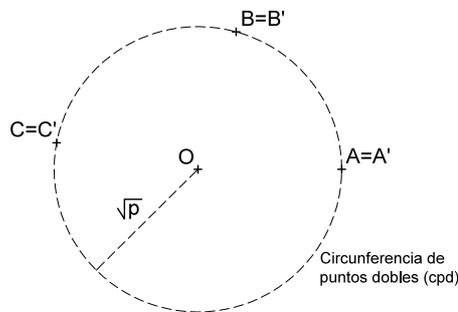
Propiedades básicas:

1. Dos puntos inversos están siempre alineados con un punto fijo llamado **polo** o **centro de inversión**.
2. Es **isogonal**, por lo que conserva los ángulos.
3. El producto de distancias del polo a un punto y a su inverso es constante, y se denomina **potencia de inversión** (p).
4. Dos pares de puntos inversos determinan una **circunferencia**.
5. Dados dos puntos A , B y sus inversos A' , B' , las rectas AA' y BB' son **antiparalelas** de las rectas AB y $A'B'$.
6. Si $p > 0$ la inversión es **positiva**. Si $p < 0$ la inversión es **negativa**, y carece de circunferencia de puntos dobles.

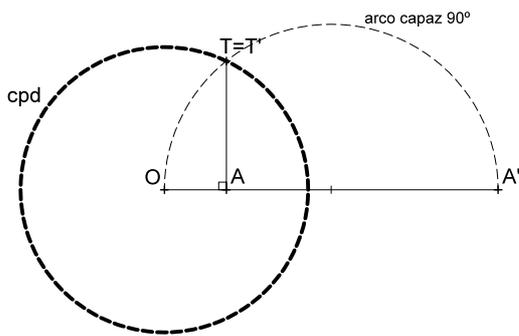
En una inversión se cumple que $OA \cdot OA' = p$, siendo p la potencia de inversión. Dicha potencia es constante. Por tanto, cuanto más se aleje A del polo más se acercará A' al mismo, para poder mantener constante el producto $OA \cdot OA'$.



Existe un punto en el que $A=A'$. Dicho punto forma, al unirlo con el polo, un radio de la **circunferencia de puntos dobles** o **circunferencia autoinversa**, de radio raíz de p , circunferencia en la que todos sus puntos son sus propios inversos, dado que están a distancia \sqrt{p} del polo.



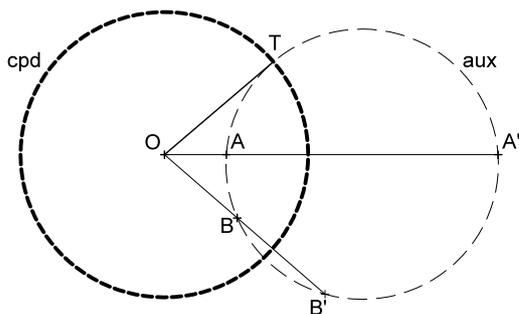
Cómo hallar la circunferencia de puntos dobles:



Datos: O polo de inversión, puntos inversos A y A'.

Mediante arco capaz:

1. Arco capaz de 90° del segmento OA' .
2. Perpendicular al segmento OA' desde A . Donde corta al arco capaz está el punto $T=T'$.
3. Circunferencia de puntos dobles con centro en O y radio OT .

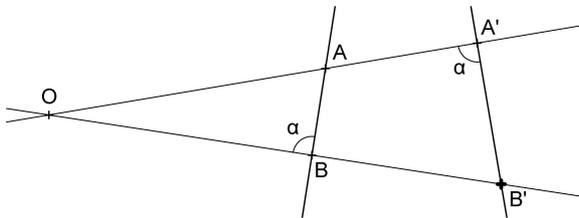


Mediante un tercer punto:

1. Punto B arbitrario. Circunferencia auxiliar que pasa por A , A' y B . En dicha circunferencia estará contenido B' , dado que dos parejas de puntos inversos siempre están contenidos en una circunferencia.
2. La potencia del polo respecto a la circunferencia auxiliar es la potencia de inversión, dado que los puntos de tangencia desde O a dicha circunferencia han de ser sus propios inversos.
3. Tangente desde O a la circunferencia auxiliar, hallando el segmento OT . Dicho segmento es la raíz de la potencia y, por tanto, el radio de la circunferencia de puntos dobles.

Inversión de puntos.

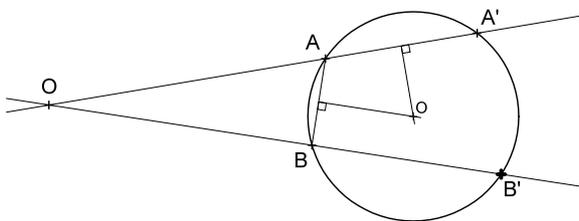
Cómo usar dos puntos inversos para hallar el inverso de otro punto, mediante rectas antiparalelas:



Datos: O polo de inversión, puntos A, A' y B.

Se traslada el ángulo α al punto A', construyéndolo bajo la recta OAA'. El otro lado del ángulo α es la recta A'B', antiparalela de la recta AB, y su intersección con OB da la posición de B'.

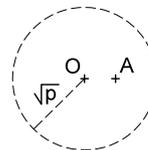
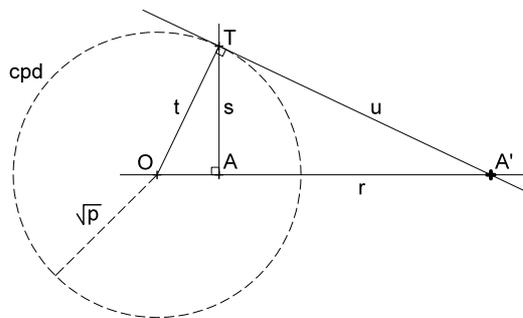
Cómo usar dos puntos inversos para hallar el inverso de otro punto, mediante una circunferencia auxiliar:



Datos: O polo de inversión, puntos A, A' y B.

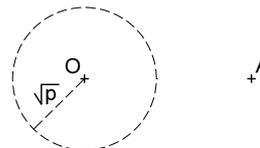
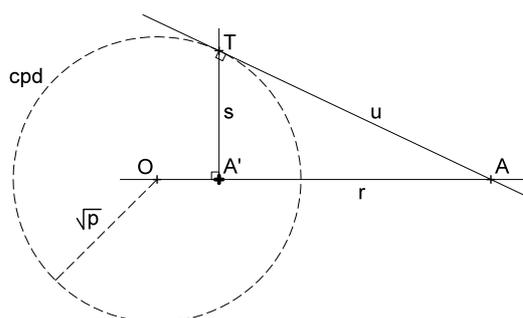
Dos parejas de puntos inversos siempre están sobre una circunferencia. Se halla la circunferencia que pasa por A, A' y B. Su intersección con la recta OB determina la posición del punto B'.

Cómo usar la circunferencia de puntos dobles para hallar el inverso de un punto:



Datos: O polo de inversión, circunferencia de puntos dobles, punto A.

1. Recta r que pasa por A y por el polo.
2. Recta s perpendicular a r desde A.
3. Punto T, intersección de la recta s y la circunferencia de puntos dobles.
4. Recta t que pasa por T y por el polo.
5. Recta u perpendicular a t desde T.
6. La intersección de las rectas u y r determina el punto A'.



Datos: O polo de inversión, circunferencia de puntos dobles, punto A.

1. Recta r que pasa por A y por el polo.
2. Recta u, tangente a la circunferencia desde A.
3. Recta s, que pasa por el punto T de tangencia y es perpendicular a la recta r.
4. La intersección de las rectas s y r determina el punto A'.

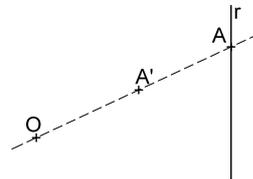
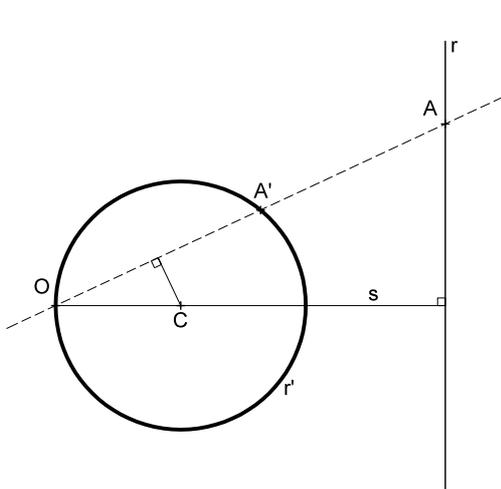
Inversión de rectas.

Una recta que pase por el polo es autoinversa, aunque sus puntos no lo son. Únicamente son inversos de sí mismos los puntos que también pertenezcan a la circunferencia de puntos dobles.



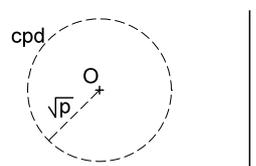
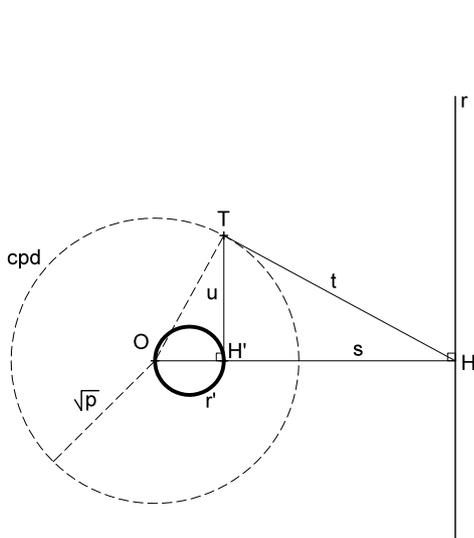
Una recta que no pase por el polo se transforma en una circunferencia, que tendrá las siguientes características:

- Pasará por el polo de inversión.
- Su centro estará en la recta perpendicular desde el polo a la recta original.
- Si llamamos H al pie de la perpendicular trazada desde el polo a la recta, el diámetro de la circunferencia será OH'.



Datos: O polo de inversión, recta r, un par de puntos inversos A y A'.

1. Recta s, perpendicular a r desde el polo. En ésta perpendicular se halla el centro de la circunferencia inversa de r.
2. Dado que r pasa por A, r' pasa por A'. Por tanto, el segmento OA es una cuerda de la circunferencia solución. La intersección de su mediatriz con la recta s determina el centro C de la circunferencia solución.
3. r' es la circunferencia de centro C y radio $CO=CA$.



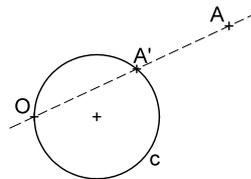
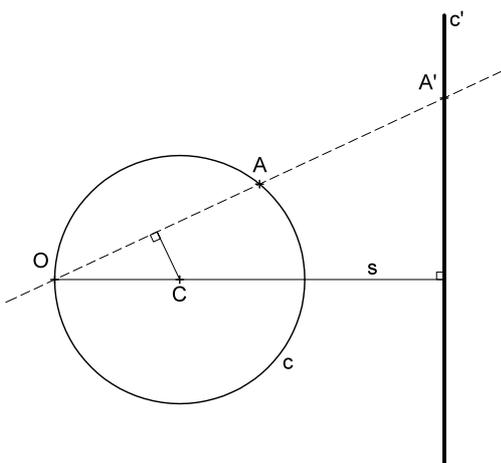
Datos: O polo de inversión, recta r, circunferencia de puntos dobles.

1. Recta s, perpendicular a r desde el polo. Punto H es el pie de dicha perpendicular. En esta perpendicular está el centro de la circunferencia inversa de r.
2. Punto H', inverso de H, usando la circunferencia de puntos dobles. Para ello:
 - Recta t perpendicular a la circunferencia de puntos dobles desde H. Punto de tangencia T.
 - Recta u que pasa por T y es perpendicular a la recta s.
 - La intersección de u y s determina el punto H'.
3. El segmento OH' es el diámetro de la circunferencia r'.

Inversión de circunferencias que pasan por el polo.

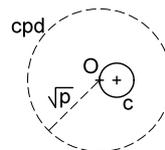
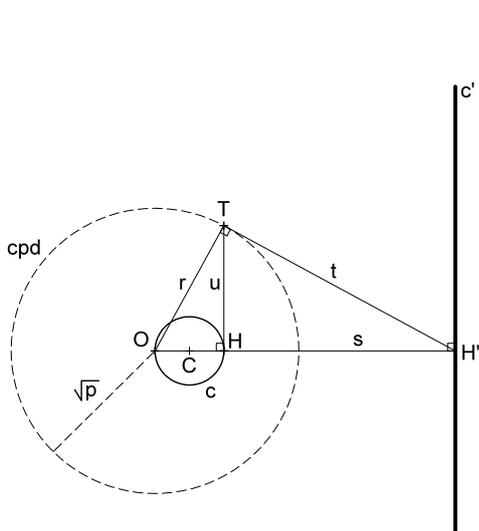
Una circunferencia que pase por el polo se transforma en una recta, que tendrá las siguientes características:

- No pasará por el polo de inversión.
- Será perpendicular a la recta que une el polo con el centro de la circunferencia.
- Si llamamos OH al diámetro de la circunferencia, la recta será perpendicular a OH por H'.



Datos: O polo de inversión, circunferencia c, un par de puntos inversos A y A'.

1. Recta s que une el polo con el centro de la circunferencia. La inversa de la misma será perpendicular a s.
2. Dado que c pasa por A, c' pasará por A'. Por tanto, desde A' se traza una recta perpendicular a s, recta que es la inversa de la circunferencia c.



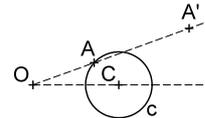
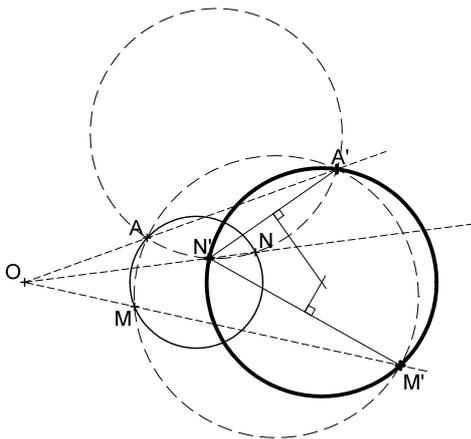
Datos: O polo de inversión, circunferencia c, circunferencia de puntos dobles.

1. Recta s, que contiene al polo y al centro de la circunferencia. Punto H el punto opuesto del diámetro trazado. La recta inversa de la circunferencia será perpendicular a esta recta s.
2. Punto H', inverso de H, usando la circunferencia de puntos dobles. Para ello:
 - Recta u perpendicular a la recta s desde H. Punto de tangencia T.
 - Recta r, que pasa por T y por el polo.
 - Recta u, que pasa por el punto T y es perpendicular a la recta r.
 - La intersección de t y s determina el punto H'.
3. Perpendicular a s desde H'. Dicha recta es la inversa de la circunferencia c.

Inversión de circunferencias que no pasan por el polo (1).

Una circunferencia que no pase por el polo se transforma en otra circunferencia, que tendrá las siguientes características:

- No pasará por el polo de inversión.
- Será homotética con la circunferencia original, en una homotecia de centro el polo y razón de homotecia igual a la razón de inversión dividida por la potencia del polo respecto a la circunferencia original.

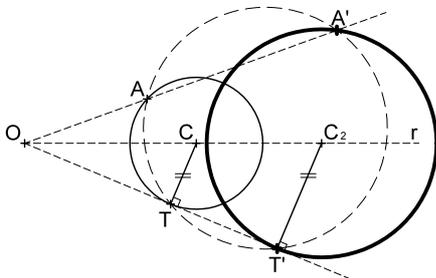


Datos: O polo de inversión, circunferencia c , un par de puntos inversos A y A'.

Resolución usando tres puntos:

1. Puntos M y N arbitrarios sobre la circunferencia.
2. Puntos M' y N', inversos de M y N. Por ejemplo, usando una circunferencia auxiliar que pase por A, A' y el punto a invertir.
3. Circunferencia que pasa por A', M' y N', que será la inversa de la circunferencia dato.

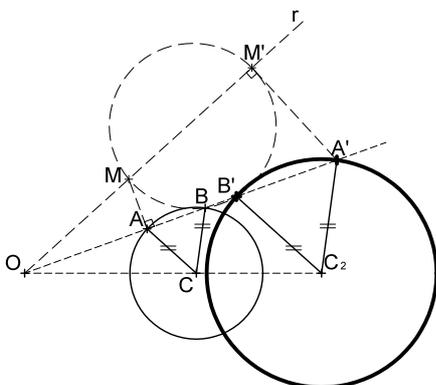
NOTA: En vez de tres puntos se pueden invertir únicamente dos, siempre que formen un diámetro. Sus inversos formarán también un diámetro de la circunferencia inversa.



Resolución usando una tangente desde el polo:

1. Recta r que une el polo con C. En ella estará el centro de la circunferencia inversa.
2. Tangente a la circunferencia c desde el polo. Punto T de tangencia.
3. Punto T' inverso de T. Un método rápido para hacerlo es usar una circunferencia auxiliar que pase por A, A' y T.
4. Radio TC, y su paralelo desde T'. Donde este radio homotético al primero corte a la recta r estará C₂, centro de la circunferencia inversa.

ATENCIÓN: El inverso de C, centro de la circunferencia dato, **NO ES** el punto C₂, centro de la circunferencia inversa.



Resolución usando dos puntos inversos:

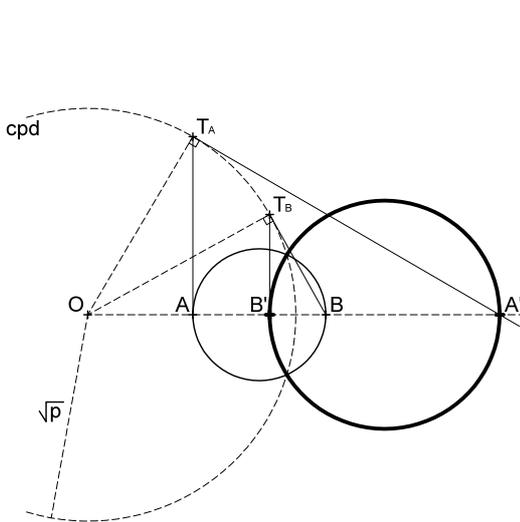
1. Punto B, segunda intersección de la secante OA con la circunferencia c .
2. Punto B' inverso de B. Un método rápido es el siguiente:
 - Recta r arbitraria, que pase por el polo.
 - Recta perpendicular a OA. Punto M, intersección de esta recta con la r .
 - Recta perpendicular a r desde A'. Punto M', intersección de esta recta con la recta r .
 - Punto B', inverso de B, con la ayuda de M y M'. Un método rápido es usar una circunferencia auxiliar que pase por M, M' y B.
3. Sendos radios desde A y B hasta C, centro de la circunferencia a invertir.
4. Paralelas a los radios anteriores desde A' y B', invirtiendo el orden de los radios - el que pasa por A en la circunferencia original pasará por B' en la invertida, y viceversa.
5. La intersección de los radios homólogos determina el punto C₂, centro de la circunferencia inversa a la dada.

ATENCIÓN: El inverso de C, centro de la circunferencia dato, **NO ES** el punto C₂, centro de la circunferencia inversa.

Inversión de circunferencias que no pasan por el polo (2).

Una circunferencia que no pase por el polo se transforma en otra circunferencia, que tendrá las siguientes características:

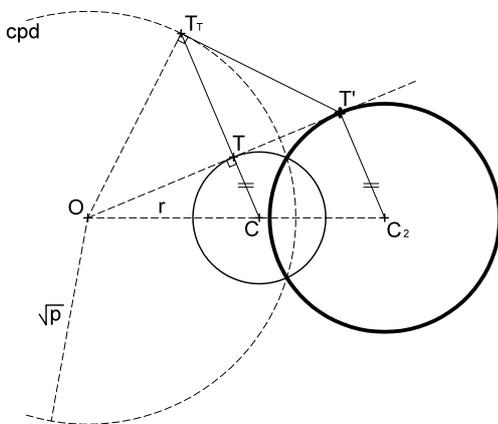
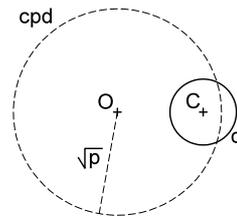
- No pasará por el polo de inversión.
- Será homotética con la circunferencia original, en una homotecia de centro el polo y razón de homotecia igual a la razón de inversión dividida por la potencia del polo respecto a la circunferencia original.



Datos: O polo de inversión, circunferencia c, circunferencia de puntos dobles.

Resolución usando un diámetro:

1. Dos puntos A y B arbitrarios, que formen un diámetro alineado con el polo.
2. Puntos A' y B', inversos de A y B. Dichos puntos formarán un diámetro de la circunferencia inversa.

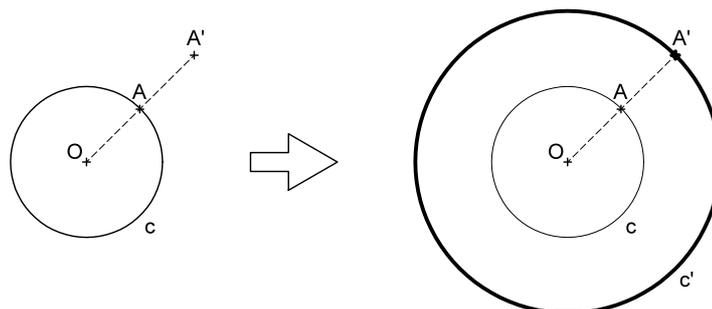


Resolución usando una tangente desde el polo:

1. Recta r que une el polo con C. Conendrá el centro de la circunferencia inversa.
2. Tangente a la circunferencia c desde el polo. Punto T de tangencia.
3. Punto T', inverso de T. Para ello:
 - Perpendicular a OT desde T. Punto T_T en intersección con la cpd.
 - Tangente a la cpd en el punto T_T. Punto T' en intersección con la recta OT.
4. Radio TC, y su paralelo desde T'. Donde este radio homotético al primero corte a la recta r estará C₂, centro de la circunferencia inversa.

ATENCIÓN: El inverso de C, centro de la circunferencia dato, **NO ES** el punto C₂, centro de la circunferencia inversa.

Caso particular: Si una circunferencia tiene como centro el polo, su inversa será concéntrica a ella. Por tanto, para hallarla únicamente tendremos que trazar una circunferencia con el mismo centro (el polo) y que pase por el inverso de un punto que pertenezca a la circunferencia inicial.



Un punto

P
+

se transforma en



Otro punto.

P'
+

Una recta que pasa por el polo



se transforma en

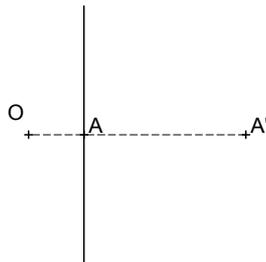


ella misma.



Cuidado: Los puntos de la recta no son sus propios inversos (salvo los que se hallen sobre la circunferencia de puntos dobles).

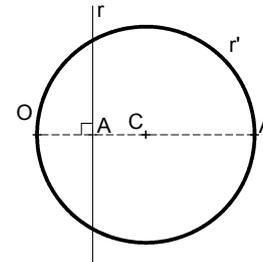
Una recta que no pasa por el polo



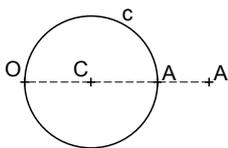
se transforma en



una circunferencia que pasa por el polo, tal que la recta que une su centro C con el polo es perpendicular a la recta original.



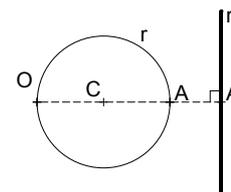
Una circunferencia que pasa por el polo



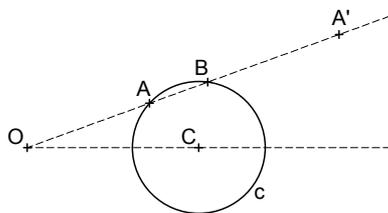
se transforma en



una recta que no pasa por el polo, perpendicular al diámetro de la circunferencia original que contiene al polo.



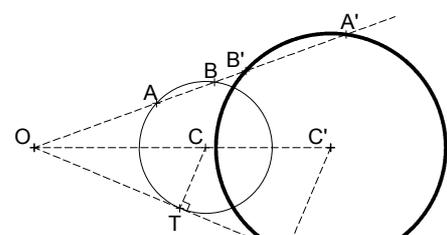
Una circunferencia que no pasa por el polo



se transforma en

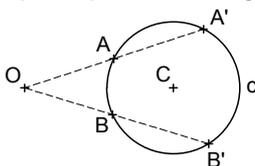


una circunferencia que no pasa por el polo, homotética con la original.



Cuidado: Los puntos C1 y C2 no son inversos.

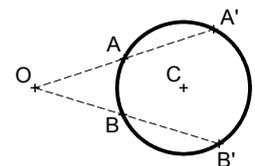
Una circunferencia que pasa por un par de puntos homólogos



se transforma en



ella misma.



Cuidado: Los puntos de la circunferencia no son sus propios inversos (salvo los que se hallen sobre la circunferencia de puntos dobles).